Mündliche Prüfung in Mathe – Analysis/Vektoren

Wichtig: Wenn ihr in den Breakoutrooms seid, stellt euch zuerst kurz gegenseitig vor, damit die Situation nicht irgendwie cringe wird. Geht wertschätzend miteinander um. Wenn der/die Partner/in auf eine Frage keine Antwort hat, helft ihr ihm/ihr aufmunternd auf die Sprünge, so wie das in einer guten mündlichen Prüfung auch gemacht wird.

Im **ersten Teil** geht es um Analysis. Ihr bekommt 30 Minuten Zeit um die beiden Aufgaben zur Kiefer und Buche alleine zu bearbeiten und euren Vortrag dazu vorzubereiten. Dann präsentiert ihr euch zu zweit jeweils eine Aufgabe gegenseitig. Einigt euch, wer welche Aufgabe vorträgt. In der echten Prüfung würdet ihr natürlich die kompletten Aufgaben vortragen, die ihr bekommen habt. Jeder Vortrag sollte 5-6 Minuten dauern.

Im **zweiten Teil** geht es um Vektoren und es werden Fragen gestellt, die im Gespräch spontan beantwortet werden. Im zweiten Teil einigt ihr euch wer Partner A und wer Partner B ist und legt die jeweils anderen Blätter weg. NICHT schummeln!! Das würde die Übung kaputtmachen!! Partner A fängt an.

Tipp für später: Geht die Prüfung in ein paar Tagen nochmal durch, präsentiert dann die Aufgabe, die ihr dieses Mal nicht präsentiert habt und seid dann der Partner, der ihr dieses Mal nicht wart. Wenn ihr noch mehr mündliche Prüfungsfragen üben wollt, könnt ihr euch auch „von mir“ im Video befragen lassen, ich habe zu jedem der großen Themen eine Prüfungssimulation bei YouTube hochgeladen.

Komplette mündliche Prüfung, in der ich von meiner ehemaligen LK-Lehrerin geprüft werde

Meine 5 besten Tipps für die mündliche Prüfung

In 3 Schritten perfekt für die mündliche Prüfung vorbereitet

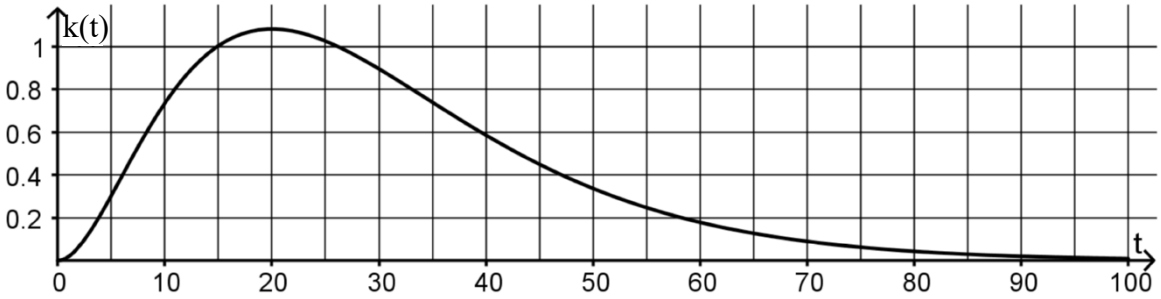
Mündliche „Mitmachprüfung“ Analysis

Mündliche „Mitmachprüfung“ Vektoren

Mündliche „Mitmachprüfung“ Stochastik

Kiefer

Die Funktion k mit $k(t) = 0{,}02t^2 \cdot e^{-0{,}1t}$ beschreibt näherungsweise das Wachstum einer Kiefer. Dabei gibt $k(t)$ nicht die Höhe der Kiefer, sondern ihre Wachstumsgeschwindigkeit in Metern pro Jahr (zum Zeitpunkt t) an. Zu Beginn der Beobachtung ($t = 0$) ist die junge Kiefer frisch eingepflanzt und hat eine Höhe von ca. 30cm. Der Graph der Funktion k ist hier dargestellt.



a) **Berechnen** Sie $k(10)$ und **interpretieren** Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.
Beschreiben Sie wie sich die Kiefer im Laufe der Jahre entwickelt, indem Sie auf die Eigenschaften und besonderen Punkte des Graphen von k eingehen.

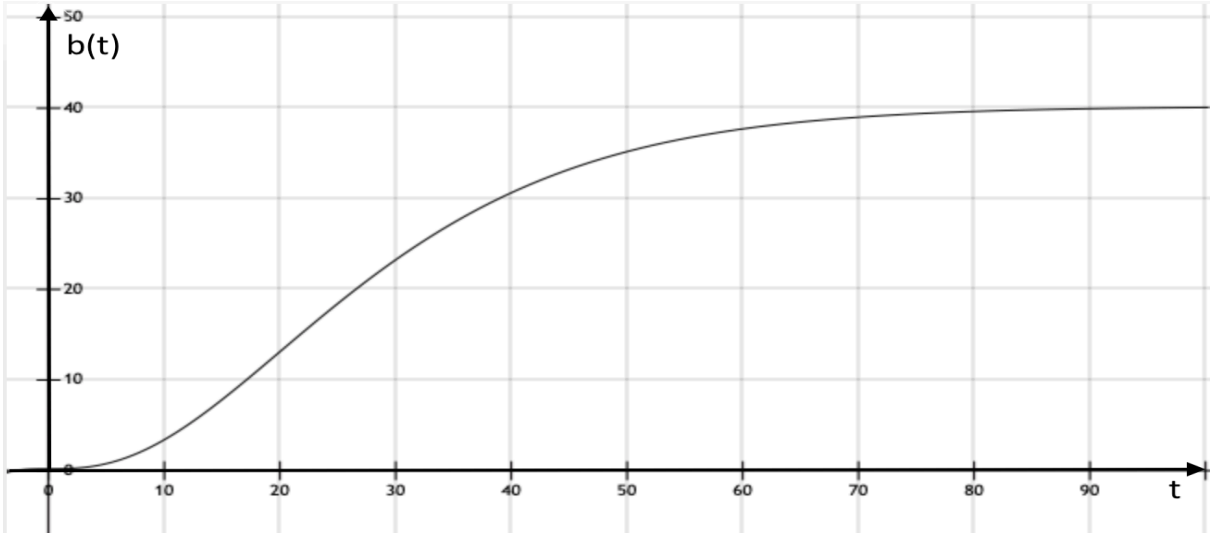
b) **Bestimmen** Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die Kiefer am stärksten wächst. **Geben** Sie außerdem die maximale Wachstumsgeschwindigkeit **an**.
Es kann dabei ohne Nachweis genutzt werden, dass $k''(t) = 0{,}0002(t^2 - 40t + 200) \cdot e^{-0{,}1t}$ gilt.

c) **Begründen** Sie anhand des Graphen von k, dass die Kiefer nach 40 Jahren weniger als 40m hoch ist.

Buche

Die Höhe einer Buche kann näherungsweise durch die Funktion $b(t) = -(0{,}2t^2 + 4t + 40) \cdot e^{-0{,}1t} + 40{,}3$ beschrieben werden. Dabei gibt $b(t)$ die Höhe der Buche in Metern und t die seit der Auspflanzung vergangene Zeit in Jahren an.

Im Folgenden ist der Graph der Funktion b abgebildet.



a) **Berechnen** Sie den Funktionswert von b an der Stelle $t = 0$ und **interpretieren** Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. **Beschreiben** Sie anhand des Graphen von b, wie sich die Buche im Laufe der Jahre entwickelt.

b) **Berechnen** Sie die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit der Buche in den ersten 50 Jahren nach der Auspflanzung.

c) **Bestimmen** Sie rechnerisch das Alter, in dem die Fichte am stärksten wächst. **Geben** Sie zudem ihre Höhe zu diesem Zeitpunkt **an**.
Es kann dabei ohne Nachweis genutzt werden, dass die erste Ableitung $b'(t) = 0{,}02t^2 \cdot e^{-0{,}1t}$ und die dritte Ableitung $b'''(t) = 0{,}0002(t^2 - 40t + 200) \cdot e^{-0{,}1t}$ ist.

Kiefer

a) ges.: $k(10)$

$$k(10) = 0{,}02 \cdot 10^2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot 10}$$
$$\approx 0{,}73$$

10 Jahre nach BP wächst die Kiefer mit einer Geschwindigkeit von etwa $0{,}73\ m/J$.

Die Kiefer wächst zunächst langsam, dann immer schneller, bis sie 20 Jahre nach BP ihre max. Wachstumsgeschwindigkeit von über $1\ m/J$ erreicht. Dann nimmt die Wachstumsgeschwindigkeit rapide ab, bis die Kiefer ca. 100 Jahre nach BP gar nicht mehr wächst, also ausgewachsen ist.

b) ges.: stärkstes Wachstum
$\Rightarrow$ HP, da $k(t)$ das Wachstum beschreibt

$$k(t) = \underbrace{0{,}02t^2}_{u} \cdot \underbrace{e^{-0{,}1t}}_{v}$$

$$k'(t) = e^{-0{,}1t}\,(0{,}04t - 0{,}002t^2)$$

$k''(t)$ = siehe Anfgabe

N.B. $k'(t) = 0$

$\Rightarrow t_1 = 0 \quad \vee \quad t_2 = 20$

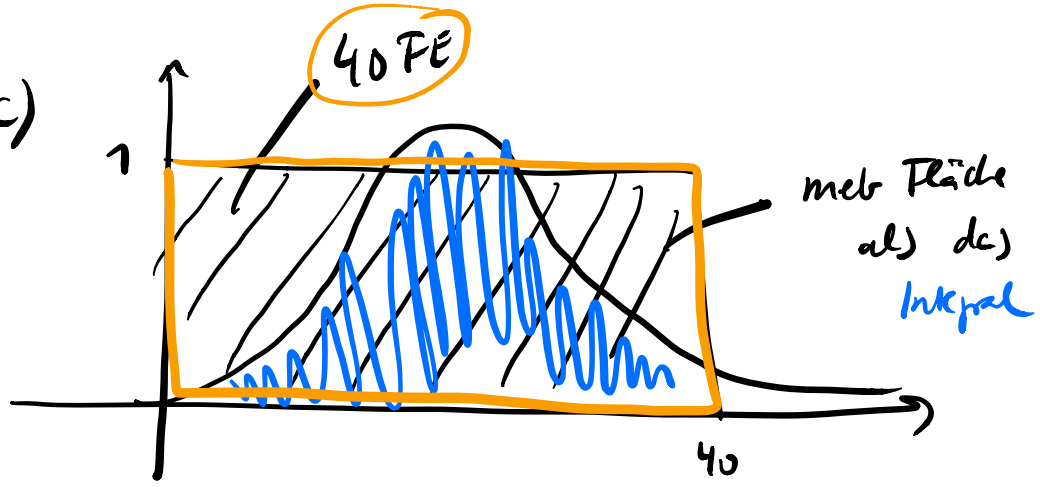
H.B. $k''(0) \approx 0{,}04 > 0$

$k''(20) = \ldots < 0 \Rightarrow$ HP

Nach 20 Jahren nimmt sie am schnellsten.

Die Geschwindigkeit beträgt $k(20) \approx 1{,}08 \left[\frac{m}{a}\right]$.

c)



Also: $\int_0^{40} k(t)\,dt < 40$

Buche

a) ges.: $b(0)$

$b(0) = -(0{,}02 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + 40)\, e^{-91 \cdot 0} + 40{,}3$

$= 0{,}3$

Zum Aufzeichnungszeitpunkt ist die Buche $0{,}3$ m groß.

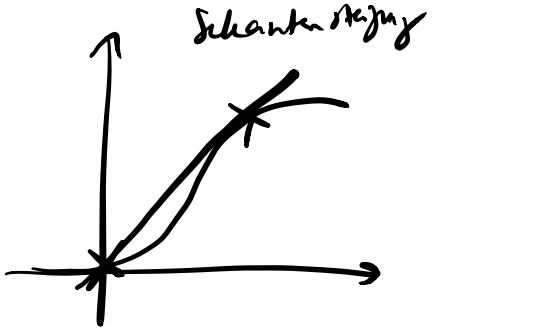
Die Buche wächst zu Beginn immer schneller, dann ab einem Alter von ca. 20 J. immer langsamer, bis sie nach 90–100 Jahren ihre Höhe hält und so nicht mehr wächst, also ausgewachsen ist.

b) ges.: Ø-Wachstumsgeschwindigkeit (Mittlere Änderungsrate)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad P_1(0|0{,}3) \quad P_2(50|53{,}3)$$

$$\Rightarrow m = \frac{50{,}2 - 50}{50 - 0}$$

$$= 0{,}7 \text{ m/J}$$



In den ersten 50 Jahren wächst die Buche durchschnittlich 0,7 m pro Jahr.

c) ges.: WP Beachte: WP von Buche ist HP von Kiefer!

$b'(t) = 0{,}02t^2 \cdot e^{-0{,}1t}$

$b''(t) = e^{-0{,}1t}(0{,}04t - 0{,}002t^2)$

$b'''(t)$ = siehe Anfrage

N.B. $\quad b''(t) = 0$

$\Rightarrow \quad t_1 = 0 \quad \vee \quad t_2 = 20$

H.B. $\quad b'''(0) = 0$ ↯

$b''(20) = -0{,}005 < 0$

$\Rightarrow$ stärkste Anstieg

20 Jahre nach der Anpflanzung wächst die Buche am schnellsten. Ihre Höhe zu dem Zeitpunkt beträgt $b(20) = 13{,}2$ m.

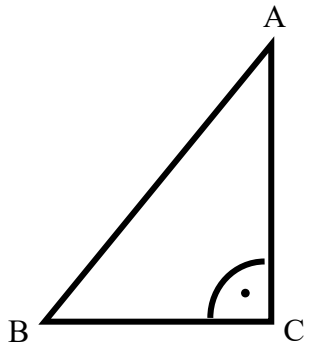
Partner A (Seite 1)

Herzlich Willkommen zur mündlichen Prüfung. Bist du bereit? Du brauchst einen Zettel, einen Stift und deinen GTR.

Ich sage dir jetzt drei Punkte, die du dir bitte aufschreibst, okay?

$A(1|6|13)$, $B(8|5|1)$, $C(4|2|1)$

Diese drei Punkte bilden - wie drei Punkte das immer tun, wenn sich nicht zufällig auf einer Linie liegen - ein Dreieck. Dieses Dreieck ABC ist jetzt aber nicht irgendein Dreieck, sondern hat eine besondere Eigenschaft: Es ist rechtwinklig und der rechte Winkel liegt bei C. **Mach dir bitte mal eine kleine Skizze von dem Dreieck und zeichne den rechten Winkel ein.** Nicht im 3D-Koordinatensystem, sondern einfach als ganz normales (2D-)Dreieck - und dann benenne die Eckpunkte mathematisch korrekt.
(Erwartet wird ca. sowas, A lässt sich das Dreieck von B zeigen!)



Was muss man bei der Benennung der Eckpunkte eines Dreiecks beachten?
(B sagt: „Sie werden gegen den Uhrzeigersinn benannt." Falls B das nicht weiß, gibt A den Hinweis, das ist wichtig.) Richtig, gegen den Uhrzeigersinn. **Kannst du nachweisen, dass bei C tatsächlich ein rechter Winkel vorliegt?** *(B sagt: „Ja klaro, da muss das Skalarprodukt der Vektoren $\overrightarrow{CA}$ und $\overrightarrow{CB}$ Null ergeben.")* Super, dann mach das bitte einmal und denk dran, mir dabei genau zu erklären was du machst.
(Lösung: $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, Skalarprodukt ist Null: $-3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 12 \cdot 0 = 0$)

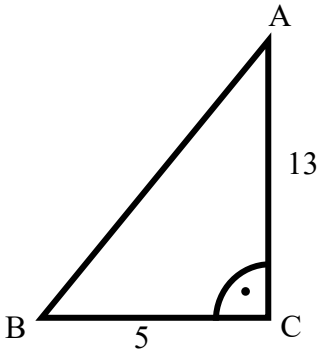
Jetzt würde ich gerne noch wissen, wie lang die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ sind. *(B erinnert sich an die Längenformel für Vektoren: Wurzel aus der Summe der quadrierten Koordinaten. Richtige Lösung ist dann für $\overline{AC}$ die Länge 13 LE und für $\overline{BC}$ die Länge 5 LE, die Rechnung ist:*
$\overrightarrow{|AC|} = \sqrt{9 + 16 + 144} = 13$ *und* $\overrightarrow{|BC|} = \sqrt{16 + 9 + 0} = 5$

A kann noch eine Info am Rande geben: **Wusstest du, dass Strecken mit einem Strich und Vektoren mit einem Pfeil über den Buchstaben gekennzeichnet werden?** *B muss dazu nichts sagen, ist nur ne Info.)*

Jetzt gebe ich an dich ab und du prüfst mich weiter. *(B übernimmt und fängt oben bei Seite 1 für Partner B an.)*

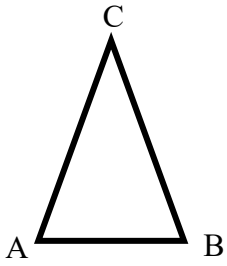
Partner B (Seite 1)

Dann herzlich Willkommen auch zu deiner mündlichen Prüfung. Bist du bereit? Du brauchst einen Zettel, einen Stift und deinen GTR. Ich habe ja eben berechnet, dass $\overline{AC}$ die Länge 13 LE und $\overline{BC}$ die Länge 5 LE hat. **Mach dir bitte mal genauso eine Zeichnung von dem Dreieck wie ich sie vorhin gemacht habe, benenne die Seiten im Uhrzeigersinn und denk daran, dass der rechte Winkel bei C ist.** *(Erwartet wird ca. sowas, B lässt sich die Skizze von A zeigen!)*



Trage jetzt bitte in die Skizze die Längen 13 für $\overline{AC}$ und 5 für $\overline{BC}$ ein. **Erinnerst du dich an die Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks?** *(Partner A erinnert sich natürlich, es gilt* $A = \frac{1}{2} g \cdot h$*, wobei auch gesagt werden muss, dass* g *die Grundfläche und* h *die Höhe des Dreiecks ist. Wenn das nicht gesagt wird, hakt Partner B nach und fragt was genau* g *und* h *sind.)* **Dann wende die Formel mal an und berechne die Fläche des Dreiecks.** *(Partner A berechnet mit der Formel* $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 13 = 32{,}5$ *[FE], wenn das nicht klappt, gibt B natürlich Tipps.)*

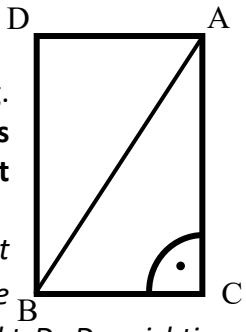
Super, das hat ja gut geklappt. Was für besondere Dreiecke kennst du noch, außer rechtwinkligen Dreiecken*? (Partner A kennt gleichseitige, gleichschenklige und unregelmäßige Dreiecke.)* **Kannst du mir mal eine Skizze von einem gleichschenkligen Dreieck machen?** Partner A macht eine Skizze, so ungefähr:



Bei dem rechtwinkligen Dreieck konntest du die Fläche ja supereasy ausrechnen, weil die Höhe wegen dem rechten Winkel der Seite $\overline{AC}$ entspricht**. Wie würdest du die Fläche von diesem gleichschenkligen Dreieck ausrechnen?** Du musst es nicht ausrechnen, einfach nur kurz erklären was du machen würdest*. (Partner A erklärt, dass der Mittelpunkt M der Basis* $\overline{AB}$ *berechnet werden müsste und dass die Höhe* h *dann der Länge des Vektors* $\overrightarrow{MC}$ *entspricht. Ideralerweise zeichent A den Mittelpunkt M und die Höhe h dann auch noch von sich aus zur Verdeutlichung in die Skizze ein.)*

Jetzt gebe ich an dich ab und du prüfst mich weiter. *(A übernimmt und fängt oben bei Seite 2 für Partner A an.)*

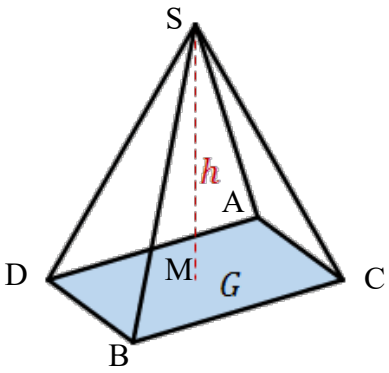
Partner A (Seite 2)



Schau nochmal auf das rechtwinklige Dreieck ABC vom Anfang der Prüfung. **Kannst du mir die Koordinaten von einem vierten Punkt D sagen, der das Dreieck zu einem Rechteck machen würde? Zeichne diesen Punkt D zuerst in die Skizze dazu und zeig ihn mir.**
(Erwartet wird so etwas wie rechts. Partner B weiß, dass man um den Punkt D zu berechnen eigentlich den Ortsvektor $\overrightarrow{OD}$ berechnen muss. Es gibt mehre Möglichkeiten, zum Beispiel $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CA}$. Dann berechnet B den Punkt D. Der richtige Punkt ist $D(5|9|13)$. Falls das mit dem Berechnen nicht klappt, muntert Partner A Partner B auf, sagt, dass das nochmal geübt werden sollte und verrät ihm den Punkt einfach.)

Dieses Rechteck ABCD soll nun die Grundfläche einer Pyramide sein. **Kannst du die Koordinaten vom Mittelpunkt M der Grundfläche berechnen?** *(Partner B weiß, dass man den Mittelpunkt aus den Punkten A, B, C und D berechnen kann. Es gibt viele Möglichkeiten, zum Beispiel $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA}$. Die richtige Lösung für M ist dann $M(4{,}5|5{,}5|7)$.)*

Das Rechteck ist jetzt also die Grundfläche einer Pyramide. Die Spitze dieser Pyramide ist der Punkt S. Er liegt senkrecht über dem Mittelpunkt M des Rechtecks. **Mach dir einmal eine grobe Skizze.** Du brauchst dafür kein 3D-Koordinatensystem zeichnen. Trag auch den Mittelpunkt M in die Skizze ein. *(Partner B zeichnet, Partner A lässt sich die Zeichnung zeigen. Es ist ungefähr sowas wie hier:)*

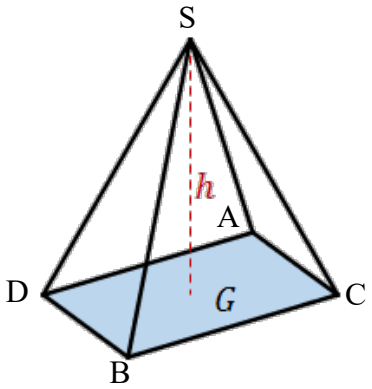


Kannst du beschreiben, wie du das Volumen der Pyramide ausrechnen würdest? Du musst es nicht ausrechnen, wirklich nur beschreiben. *(Partner B weiß, dass die Formel für das Volumen der Pyramide $V = \frac{1}{3} G \cdot h$ gilt, wobei G die Grundfläche und h die Höhe der Pyramide ist. Wenn das nicht gesagt wird, hakt Partner A nach und fragt was genau G und h sind. Dann sagt Partner B, dass die Höhe h der Pyramide als Länge des Vektors $\overrightarrow{MS}$ berechnen wird und für die rechteckige Grundfläche G die Länge von zwei der Seitenvektoren, zum Beispiel $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ miteinander multipliziert werden müssen. Dann wird nur noch in die Formel $V = \frac{1}{3} G \cdot h$ eingesetzt und fertig.)*

Jetzt gebe ich an dich ab und du prüfst mich weiter. *(B übernimmt und fängt oben bei Seite 2 für Partner B an.)*

Partner B (Seite 2)

Zeichne dir bitte noch einmal die Pyramide, die ich zuletzt gezeichnet habe. *(B lässt A genug Zeit, gibt wenn nötig Tipps, lässt sich die Skizze am Ende zeigen. Es sieht ungefähr so aus:)*



Die Eckpunkte A, B, C und D sind für uns jetzt gar nicht mehr so wichtig. Wir wollen die Spitze genauer betrachten. Schreib dir mal dazu, dass die Spitze $S(4{,}5|5{,}5|10)$ ist. *(A notiert die Koordinaten in der Skizze.)* Und jetzt zeichne bitte einen kleinen Vogel auf die Spitze. Der sitzt da gerade und will losfliegen. *(Wenn A den Vogel gemalt hat, geht es weiter.)* Jetzt diktiere ich dir eine Geradengleichung, die du bitte aufschreibst.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 5{,}5 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Vogel möchte von der Pyramidenspitze aus geradlinig auf den Boden des 3D-Systems runterfliegen, also in der x_1x_2-Ebene landen. **Kann diese Geradengleichung seine Flugbahn beschreiben?** *(A erkennt, dass die Gerade wegen dem Stützvektor zwar durch den Punkt S geht, also durchaus eine Flugbahn des Vogels sein könnte, aber dass der Richtungsvektor nicht zum Landeflug passt: Der Vogel müsste ja „nach unten" fliegen. Da die x_3-Koordinate des Richtungsvektors aber Null ist, hält der Vogel mit der Flugbahn g seine Höhe und wird immer auf der Höhe 10 bleiben, also nie in der x_1x_2-Ebene landen. Falls A Probleme damit hat, zeichnet B als Tipp die x_1x_2-Ebene auf ein Blatt Papier, zeigt sie in die Kamera und erklärt, dass alle Punkte der x_1x_2-Ebene als dritte Koordinate eine Null haben müssen.)*

Könntest du den Richtungsvektor von g so verändern, dass sie zum Landeflug passen würde? *(A erkennt, dass der RV dafür eine negative x_3-Koordinate braucht und macht aus* $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ *zum Beispiel* $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$*, aber auch alle anderen RV mit negativer x_3-Koordinate wären okay.)*

Wie könntest du den Punkt P berechnen, an dem der Vogel in der x_1x_2-Ebene landet? *(A weiß, dass die Gerade g mit einem Vektor* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ *gleichgesetzt werden muss, bzw. kommt auf die Idee eine Gleichung für die x_1x_2-Ebene aufzustellen und den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene zu berechnen.)*

Cherry-on-the-pie-Aufgaben

(Die könnte jetzt Partner A wieder an Partner B stellen, falls ihr einfach superschnell durchgekommen seid, oder aber nicht in die GK-Prüfung geht, sondern LK-Schüler seid.)

Erinnere dich noch einmal an die Grundseite der Pyramide. Sie war rechteckig und hatte die Koordinaten $A(1|6|13)$, $B(8|5|1)$, $C(4|2|1)$, $D(5|9|13)$. Schreib dir die Punkte bitte kurz auf.

Kannst du mir eine Ebenengleichung in Parameterform angeben, in der die vier Punkte liegen? *(Der Partner bildet aus einem der Punkte den Stützvektor und aus der Verbindung von je zwei anderen Punkten die Richtungsvektoren. Es gibt viele Lösungen, eine wäre zum Beispiel* $E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$*, was auf* $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix}$ *rausläuft.)*

Jetzt hätte ich die Ebene gerne in Koordinatenform dargestellt. Kannst du das auch? *(Der Partner bildet aus dem Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren den Normalenvektor der Ebene und setzt die Koordinaten als Koeffizienten in die Koordinatenform (KF) ein. Den Wert auf der anderen Seite der KF findet er durch Einsetzen eines beliebigen Punktes heraus und kommt insgesamt auf* $E: -36x_1 + 48x_2 - 25x_3 = -73$ *(zugegebenermaßen nicht superschön…) oder ein Vielfaches davon. Wenn der Partner das nicht geschafft hat, wird ihm die Ebenenvorschrift einfach diktiert.)*

Ich diktiere dir jetzt drei Punkte, die du dir bitte aufschreibst.

$R(0|0|3)$, $S(0|1|0)$, $T(0|-1|1)$

Kannst du mir sagen, welcher der drei Punkte in der Ebene liegt? *(Der Punkt T erfüllt die Gleichung, die anderen beiden nicht. Also liegt nur T in E.)* Genau, der Punkt T liegt in der Ebene, die Punkte R und S nicht. Damit haben R und S einen gewissen Abstand zur Ebene E. Wie kannst du den Abstand von einem Punkt zu einer Ebene berechnen? *(Hier kann man das Lotfußpunktverfahren beschreiben oder die Formel für den Abstand eines Punktes zu einer Ebene in KF erwähnen:* $d = \left|\frac{-36x_1 + 48x_2 - 25x_3 + 73}{|\overrightarrow{n}|}\right|$*, wobei für die Koordinaten dann der entsprechende Punkt eingesetzt werden müsste.)*

Eine Ebene teilt den 3D-Raum immer in zwei Halbräume. Das kann man sich so vorstellen, als ob die Ebene eine unendlich große Wand im Koordinatensystem ist. **Kannst du mir sagen, ob die Punkte R und S auf derselben Seite oder ob sie auf verschiedenen Seiten der Ebene E liegen?** *(Wenn man R und S in E einsetzt, kommt bei R der Wert -75 und bei S der Wert 48 raus. Damit ist einer der Werte kleiner als -73 und der andere größer, sie liegen also auf verschiedenen Seiten der Ebene.)*